http://math.uni.lu/parlier/ hugo.parlier@uni.lu

Exercices 14

1. Calculer les limites suivantes si elles existent :

a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-\cos x}{x}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

d) $\lim_{x\to \infty} \frac{x^3}{e^{4x}}$

e) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1+\cos x}{e^x-1}$

f) $\lim_{x\to \infty} x^{\sin(1/x)}$

g) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)-2x^2}{x^4}$

h) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$

2. Soit f et g différentiables sur $\mathbb{R}$ et $f(0) = g(0)$. Montrer que si $f'(x) \leq g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. Soit f différentiable sur $\mathbb{R}$ avec $f(0) = 0$ qui satisfait $1 \leq f'(x) \leq 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $x \leq f(x) \leq 2x$ pour tout $x \geq 0$.

4. Trouver les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{1/x}$

b) $\lim_{x\to \infty}(e^x+x)^{1/x}$

c) $\lim_{x\to \infty}(1+\frac{2}{x})^x$

5. Soit $f(x) = x\cos x \sin x$ et $g(x) = e^{\sin x}(x + \cos x \sin x)$, deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$.

b) Montrer que $f'(x) = 2(\cos x)^2$ et que $g'(x) = e^{\sin x}(2\cos x + f(x))$.

c) Montrer que

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2e^{-\sin x}\cos x}{2\cos x + f(x)}$$

si $\cos(x) \neq 0$ et $x > 3$.

d) Montrer que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2e^{-\sin x}\cos x}{2\cos x + f(x)} = 0$$

mais que la limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

n'existe pas.

6. Calculer les polynômes de Taylor de degré n suivants :

a) $f(x) = 2x^3 + x + 3$ autour du point $a = 0$ pour $n = 3$.
b) $f(x) = -x^2 + 3x + 1$ autour du point $a = 2$ pour tout n.
c) $f(x) = e^{2x}$ autour du point $a = 1$ pour $n = 4$.
d) $f(x) = \cos(x)$ autour du point $a = 0$ pour tout n.
e) $f(x) = \cosh(x)$ autour du point $a = 0$ pour tout n.